Colles de Maths - semaine 12 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Révisions d'analyse

Exercice 1 Soit $\alpha > 0$. Montrer que la formule $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha x}$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

Exercice 2 Montrer que la formule $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et déterminer des équivalents de f en -1 et $+\infty$.

Exercice 3 Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \sin^{\circ n}(x)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ ($\circ\, n$ signifie composée n fois).

Exercice 4 Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Groupes

Exercice 5 Quels sont les groupes qui possèdent un nombre fini de sous-groupes ?

Exercice 6

1. Soit G un groupe fini tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$. Montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.
   Indication : On pourra commencer par montrer que G est abélien.
2. En déduire que tout groupe d'ordre $2p$ avec p premier possède un élément d'ordre p.

Exercice 7

1. Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
2. En déduire que si K est un corps, tout sous-groupe fini de K^* est cyclique.

Exercice 8 Soit K un corps et G un sous-groupe fini de K^*. Dénombrer l'ensemble des éléments de G d'ordre d pour tout d diviseur de $|G|$, et en déduire que G est cyclique.

Exercice 9 Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. Soit $\chi : H \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes. Montrer que χ se prolonge en un morphisme de groupe $\tilde{\chi} : G \to \mathbb{C}^*$.